QED 1–7

Matematikk for grunnskolelærerutdanningen

Bind 2

Fasit kapittel 1 – Tallenes hemmeligheter

CAPPELEN DAMM AKADEMISK

Kapittel 1

Oppgave 8. Nei

Oppgave 9. Det finnes ikke nødvendigvis et minste element i mengden. Et eksempel er at de hele tallene, $\mathbb{Z}$, kan ordnes i rekkefølge, men ikke har et minste element.

Oppgave 11. b) Fordi $\{989, 1000, 1001, 1009\}$ er en delmengde av de naturlige tallene $\mathbb{N}$.

Oppgave 12. Addisjon og multiplikasjon

Oppgave 13. b) Hvis vi ser på hele tall er $\{1\}, \{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}$ de mulige mengdene.

Oppgave 14. $0/0$ er udefinert, men hvis man pr definisjon utelukker dette, vil de rasjonale tallene $\mathbb{Q}$, de reelle tallene $\mathbb{R}$ og de komplekse tallene $\mathbb{C}$ være lukket under de fire regneartene.

Oppgave 18. a) $q = 4,\ r = 3$ **b)** $q = 18,\ r = 1$ **c)** $q = 7,\ r = 0$
d) $q = 7,\ r = 77$ **e)** $q = 0,\ r = 0$

Oppgave 21. $-21, 0, 21$

Oppgave 22. $-24, -12, 0, 12, 24$

Oppgave 23. $-20, -5, -4, -1, 1, 1, 20$

Oppgave 24. Alle tall på formen $-20 \cdot n$ der n er et naturlig tall eller 0.

Oppgave 27. a) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$ **b)** $-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15$
c) -15 og 15 er største felles faktorer

Oppgave 28. $-24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

Oppgave 29. $a \cdot b = SFF(a, b) \cdot MFM(a, b)$

Oppgave 31. Hvis $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, så er $SFF(a, (SFF(b, c)) = SFF(SFF(a, b), c) = SFF(SFF(a, c), b)$

Oppgave 32. a) 8 **b)** -8 **c)** -8 **d)** -1

Oppgave 34. a) $a \neq 0, b \neq 0$ **b)** For a og b heltall ulik null.

Oppgave 35. $q = 1,\ r = 13$

Oppgave 37. 45045 (og -45045)

Oppgave 38. **a)** SFF: 21, MFM: 1890 **b)** SFF: 8, MFM: 138736
c) SFF: 19, MFM: 1062347 **d)** SFF: 53, MFM: 1178190
e) SFF: 98, MFM: 15931370 **f)** SFF: 143, MFM: 331486441
g) SFF: 21, MFM: 50540490 **h)** SFF: 2021, MFM: 1459176147
i) SFF: 1, MFM: 17514355008327

Oppgave 40.

a) Eksempler er $-8, 4, 16, 28$
b) Eksempler er $-5, 7, 19, 31$
c) Eksempler er $-12, 0, 12, 24$
d) Eksempler er $-11, 6, 23, 40$
e) Eksempler er $-1, 4, 9, 14$
f) Eksempler er $-7, 0, 7, 14$
g) Eksempler er $-7, -3, 1, 5$
h) Eksempler er $-15, -4, 7, 18$
i) Eksempler er $-24, -13, -2, 9$

Oppgave 41.

a) Eksempler er $-17, -5, 7, 19$
b) Eksempler er $-18, -6, 6, 18$
c) Eksempler er $-7, -3, 1, 5$
d) Eksempler er $-14, -3, 8, 19$

Oppgave 44.

a) Eksempler er $4, 16$
b) Eksempler er $0, 12$
c) Eksempler er $1, 5$
d) Eksempler er $8, 20$
e) Eksempler er $-2, 5, 12$

Oppgave 46. Restklassen til $9 \pmod{12}$

Oppgave 47. **a)** Restklassen til $2 \pmod 7$ **b)** Restklassen til $2 \pmod 7$
c) Legg merke til at $-5 \equiv 2 \pmod 7$ **d)** $r = 2$

Oppgave 48. Begge tabellene er symmetriske om diagonalen som går fra øverst til venstre til nederst til høyre. Dette kommer fra kommutativ lov. Tabell 4 har også en symmetri om diagonelen som går fra $1 \cdot 6$ til $6 \cdot 1$. Dette er fordi $a \cdot b = (-a) \cdot (-b) \equiv (7 - a) \cdot (7 - b) \pmod 7$.

Oppgave 49.

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Tabell 1: Multiplikasjonstabell modulo 12.

Ja, $2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$ har ingen multiplikativ invers. Dette er tall som har en felles faktor med 12 som er større enn 1.

Oppgave 51. **a)** 4 **b)** 4 **c)** 16 **d)** 4 **e)** 3 **f)** 63

Oppgave 52. 8. Hint: $794 \cdot 31 \equiv 2 \cdot 4 \equiv 8 \pmod 9$

Oppgave 53. 3

Oppgave 56. **a)** 23 **b)** 12 **c)** 12

Oppgave 57. **a)** 71 **b)** 15 **c)** 15

Oppgave 58. **a)** 6 **b)** 1 **c)** 4 **d)** 6 **e)** 8

Oppgave 60. $a \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot 10^i \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot 1^i \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i \equiv T(a) \pmod 9$

Oppgave 61.

$a \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot 10^i \equiv \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot 10^i + a_0 \equiv \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot 0^i + a_0 \equiv a_0 \pmod 5$

Oppgave 62. 12

Oppgave 63. 4

Oppgave 65. Indikerer galt svar

Oppgave 66. Kan med sikkerhet si at svaret er galt

Oppgave 69. a) Indikerer rett svar **b)** Indikerer rett svar **c)** Indikerer rett svar **d)** Indikerer rett svar

Oppgave 73. a) Ja **b)** Ja **c)** 1 **d)** 0 har ingen multiplikativ invers **e)** Er ikke en gruppe

Oppgave 74. b) Ja

Oppgave 75. b) Ja **c)** Ja

Oppgave 76. a) 2 streker, $x \equiv 2 \pmod{12}$ **c)** 5 streker. Har funnet ny løsning $x \equiv 5 \pmod{12}$ **e)** $x \equiv 2 \pmod{12}$, $x \equiv 5 \pmod{12}$, $x \equiv 8 \pmod{12}$, $x \equiv 11 \pmod{12}$ **f)** Når vi har kommet til $x > 12$.

Oppgave 77. a) Nei. Likningen har ingen løsning. **b)** 3 streker. Da kommer du tilbake til 0 uten å ha vært innom 1. **c)** Hvis $b \neq 0, 4, 8$ har likningen ingen løsning.

Oppgave 78. a) $x \equiv 9 \pmod{12}$ **b)** $x \equiv 2 \pmod{12}$, $x \equiv 5 \pmod{12}$, $x \equiv 8 \pmod{12}$, $x \equiv 11 \pmod{12}$ **c)** $x \equiv 100 \pmod{400}$

Oppgave 79. a) $x \equiv 0 \pmod{15}$, $x \equiv 3 \pmod{15}$, $x \equiv 6 \pmod{15}$, $x \equiv 9 \pmod{15}$, $x \equiv 12 \pmod{15}$ **b)** $x \equiv 1 \pmod{14}$, $x \equiv 3 \pmod{14}$, $x \equiv 5 \pmod{14}$, $x \equiv 7 \pmod{14}$, $x \equiv 9 \pmod{14}$, $x \equiv 11 \pmod{14}$, $x \equiv 13 \pmod{14}$ **c)** Ingen løsninger.

Oppgave 80. 200 meter

Oppgave 81. a) $8 \cdot 1 \equiv 8 \pmod{12}$, $8 \cdot 2 \equiv 4 \pmod{12}$, $8 \cdot 3 \equiv 0 \pmod{12}$, $8 \cdot 4 \equiv 8 \pmod{12}$, $8 \cdot 5 \equiv 4 \pmod{12}$, $8 \cdot 6 \equiv 0 \pmod{12}$, $8 \cdot 7 \equiv 8 \pmod{12}$, $8 \cdot 8 \equiv 4 \pmod{12}$, $8 \cdot 9 \equiv 0 \pmod{12}$, $8 \cdot 10 \equiv 8 \pmod{12}$, $8 \cdot 11 \equiv 4 \pmod{12}$
b) $x \equiv 2 \pmod{12}$, $x \equiv 5 \pmod{12}$, $x \equiv 8 \pmod{12}$, $x \equiv 11 \pmod{12}$
c) Intet multiplikasjonsstykke i tabellen gir 1.

Oppgave 82. $x \equiv 4 \pmod{7}$

Oppgave 83. a) $x \equiv 3 \pmod{5}$ **b)** $x \equiv 8 \pmod{9}$ **c)** $x \equiv 6 \pmod{8}$
d) $x \equiv 11 \pmod{13}$ **e)** $x \equiv 0 \pmod{15}$, $x \equiv 3 \pmod{15}$, $x \equiv 6 \pmod{15}$, $x \equiv 9 \pmod{15}$, $x \equiv 12 \pmod{15}$ **f)** $x \equiv 4 \pmod{7}$

Oppgave 84. a) $2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$. Alle nulldivisorene har en felles faktor større enn 1 med 12. **b)** $1, 5, 7, 11$. Multiplikative inverser modulo 12 har 1 som største felles faktor med 12. **c)** Snitt: Den tomme mengde. Unionen: Alle tall mellom 0 og 12.

Oppgave 86. a) $2x \equiv 1 \pmod 5$, $x \equiv 3 \pmod 5$ **b)** $2x + 2 \equiv 3 \pmod 5$, $x \equiv 3 \pmod 5$ **c)** $11x \equiv 4 \pmod{13}$, $x \equiv 11 \pmod{13}$ **d)** $11x \equiv 4 \pmod{13}$, $x \equiv 11 \pmod{13}$

Oppgave 87. b) $x \equiv 2 \pmod 5$. Fyll opp 3-liters bøtta og hell den oppi 5-liters bøtta. Fyll opp 3-liters bøtta på nytt, og hell så mye som mulig opp i 5-liters bøtta. Når 5-liters bøtta er full, heller du den ut, og beholder det som var igjen i 3-liters bøtta. Dette er 1 liter. **c)** La a og b være liter som er plass til i de to bøttene. La c være mengde vann som skal måles opp. Hvis og bare hvis $SFF(a, b)|c$ kan den ønskede vannmengden måles opp.

Oppgave 88. 4 grupper med 4 elever og 3 grupper med 5 elever.

Oppgave 89. $x_t = 3 - 7t, \quad y_t = -2 + 5t$. Løsning ved $t = 0$: Fyll opp 5-liters bøtta en gang. Tøm den over i 7-liters bøtta. Fyll opp 5-liters bøtta en gang til. Hell over i 7-liters bøtta til den er full. Hell ut alt i 7-liters bøtta. Hell over resten fra 5-liters bøtta. Fyll opp 5-liters bøtta på nytt, og hell over i 7-liters bøtta til den er full. Tøm ut innholdet i 7-liters bøtta. Nå sitter du igjen med 1 liter vann i 5-liters bøtta. Du har altså fylt opp 5-liters bøtta 3 ganger og 7-liters bøtta -2 ganger (helt ut). Derfor er $x = 3$ og $y = 2$ et naturlig svar. Alternativt, sett $t = 1$. Da blir $x_1 = -4, \quad y_1 = 3$. Da fyller du opp 3 sjuliters bøtter og heller ut 4 femliters bøtter.

Oppgave 90. b) $3x + 1y = 11$.

Mulige løsninger: $x = 3, y = 2, \quad x = 2, y = 5, \quad x = 1, y = 8, \quad x = 0, y = 11$

Oppgave 91. a) $SFF(10, 24) = 2$ **b)** $x_t = -4 + 5t, y_t = 10 - 12t$ der t er et helt tall. **d)** Ja, fordi $SFF(10, 24) = 2$ vil det finnes to heltallsløsninger for hver gang x øker med 10.

Oppgave 92. a) $x_t = 7 + 38t, y_t = -51 - 277t$ der t er et helt tall. Ingen positive løsninger. **b)** $x_t = 6 - 19t, y_t = 29 - 92t$ der t er et helt tall. Positive løsninger: Alle x_t, y_t der $t \leq 0$. **c)** $x_t = 7 - 117t, y_t = 78 - 1304t$ der t er et helt tall. Positive løsninger: Alle x_t, y_t der $t \leq 0$. **d)** $x_t = -11 + 78t, y_t = 210 - 1489t$ der t er et helt tall. Ingen positive løsninger. **e)** Ingen løsninger eksisterer.

Oppgave 93. a) $x \equiv 226 \pmod{277}$ **b)** $y \equiv 1226 \pmod{1304}$

c) $x \equiv 210 \pmod{5956}$, $x \equiv 1699 \pmod{5956}$, $x \equiv 3188 \pmod{5956}$, $x \equiv 4677 \pmod{5956}$

Oppgave 94. Hint: $-15x + 21y = 133 = 7 \cdot 19$. $SFF(15, 21) \nmid 7 \cdot 19$. Finnes ikke heltallskoordinater.

Oppgave 95. a) Krav: $d \cdot SFF(a, b)|bc$ samt $b \neq 0, d \neq 0$.

Oppgave 96. a) $SFF(a, b) = 1$. **b)** La $e = \min(a, b)$. Kravet er da at de diofantiske likningene $ax + by = d$ har en positiv løsning for alle d der $c \leq d < c + e$.

Oppgave 98. $1029 = 3^1 \cdot 7^3$

Oppgave 99. 121

Oppgave 101. $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, $99 = 3^2 \cdot 11$, $105 \cdot 99 = 10395$

Oppgave 103. a) Hun har ikke rett. Eksempel: $2 + 3$ er ikke et partall. **b)** La p og q være to primtall slik at $p > 2, q > 2$. Da er $p + q$ et partall.

Oppgave 105. Det er ofte lett å bryte koder med bokstavforskyvning

Oppgave 106. ymcqymcuww

Oppgave 110. a) Ja. Vi får henholdsvis 5 og 3 i rest. **b)** Ja, for dette fødselsnummeret. **c)** Ja. Vi får henholdsvis 8 og 9 i rest.

Oppgave 111. a) 5 **b)** 7

Oppgave 115. a) Aritmetisk, 21, 25 **b)** Aritmetisk, 18, 21
c) Geometrisk, 729, 2187 **d)** Aritmetisk, 14, 16 **e)** Geometrisk, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$
f) Ingen av delene

Oppgave 116. Den eneste geometriske følgen som inneholder 0 er den følgen hvor alle tallene er 0.

Oppgave 118. a) Tre neste tall: $59, 79, 102$.
Rekursiv formel: $F_n = F_{n-1} + 3n - 4$ Eksplisitt formel: $F_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3$
b) Tre neste tall: $52, 67, 84$. Rekursiv formel: $F_n = F_{n-1} + 2n - 1$ Eksplisitt formel: $F_n = n^2 + 3$

Oppgave 119. a) Tre neste tall: $44, 50, 56$ **b)** $F_n = F_{n-1} + 6$ **c)** $F_n = 6n + 8$ **d)** 130 **e)** $3n^2 + 11n$

Oppgave 121. e) Tre neste tall: $42, 64, 93$

Oppgave 122. 200

Oppgave 123. a) Tre neste tall: $31, 43, 57$ **b)** Tre neste tall: $1440, 10080, 80640$
c) For a) Rekursiv formel: $F_n = F_{n-1} + n - 2$ Eksplisitt formel: $F_n = n^2 - n + 1$
For b) Rekursiv formel: $F_n = F_{n-1} \cdot n$ Eksplisitt formel: $F_n = 2(n!)$

Oppgave 124. **a)** Tre neste tall: $12500, 62500, 312500$ **b)** $F_n = F_{n-1} \cdot 5$ **c)** $F_n = 4 \cdot 5^{n-1}$ **d)** 3124 **e)** $S_n = 5^n - 1$

Oppgave 125. **a)** 1030 kroner **b)** 1060,9 kroner **c)** $1000 \cdot 1{,}03^n$ kroner

Oppgave 126. **a)** $S_4 = 16$ **b)** $S_{10} = 100$

Oppgave 127. **a)** $S_4 = 15$ **b)** $S_{10} = 1023$

Oppgave 132. Forholdet går mot tilnærmet 0,6180339887498948482

Oppgave 133. På hvert rektangel legger man på et nytt kvadrat langs den lengste siden.

Oppgave 137. Hint: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $-\frac{1}{\phi} = -\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}+1} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Oppgave 138. **a)** $F_4 = 3$ **b)** $F_9 = 34$ **c)** $F_{11} = 89$ **d)** Leddet $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ vil bli svært lite for store n. Vi kan skrive $F_n \approx \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ for n stor.